봉 쌤이
추 천하고
찜 한
문제 닭

2024년 수학1 중간

저자소개

대치 이것이 수학이다 대표강사
현 이투스 온라인 강사
인피니트 연구소

이봉우 선생님

연락처 02-501-3747
카카오톡 bong800
유튜브 이봉우 검색
인스타 ibong400

봉추찜닭 수학1 중간

CONTENTS

01 지수 3P

02 로그 19P

03 지수함수 39P

04 로그함수 57P

05 삼각함수의 정의 95P

06 삼각함수의 그래프 107P

01

지수

1. 다음 조건을 만족시키는 세 수 a, b, n의 모든 순서쌍 (a, b, n)의 개수는?

(가) $12a-2a^2$의 값은 2 이상의 자연수이다.
(나) 2 이상의 어떤 자연수 n에 대하여 b는 $12a-2a^2$의 n제곱근 중 정수이다.

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

2. 2 이상의 자연수 n에 대하여 n^2-2n-8의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(3)+f(5)+f(6)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

3. $|m| \le 5$, $|n| \le 5$, $mn+3n-2m \ge 2$를 만족하는 두 정수 m, n에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

(가) 두 정수 m, n 중 하나가 0이면 다른 하나는 양수이다.
(나) $m^n - n^m$의 $(mn+3n-2m)$의 제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다.

4. 실수 x와 2 이상의 자연수 k에 대하여 $(k-x)(k^2-xk+3x)$의 k제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(k)$라 하자. $f(2)+f(3)+f(4)=3$을 만족하는 20 이하 자연수 x의 합은?

① 75 ② 76 ③ 77 ④ 78 ⑤ 79

5. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $4n^2-40n+91$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n) \neq f(n+2)$을 만족하는 n의 합은?

① 8　② 12　③ 18
④ 24　⑤ 28

6. 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f_3((x+2)(x-3)) > f_4((x+2)(x-3))$을 만족시키는 정수 x의 개수는 4이다.
ㄴ. $a<0$일 때, $f_{2n+1}(a)-f_{2n}(a)=-1$이다.
ㄷ. 2 이상의 자연수 a, b에 대하여 $f_a(b) \neq f_b(a)$이면 $f_{a+b}(b) < f_{ab}(a)$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 모든 상수 k의 값의 합은?

$(\sqrt{2})^{-(n-3)^2+k}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -8이다.

① 25 ② 26 ③ 27
④ 28 ⑤ 29

8. 두 집합 $A=\{2,\ 3\}$, $B=\left\{-3,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 3,\ 9\right\}$에 대하여 집합 X를 $X=\{x\,|\,x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x\text{는 실수}\}$라 할 때, 조건에 맞는 실수 m, n에 대하여 $6m\times n$의 값은?

(가) 집합 X의 원소의 개수는 m개다.
(나) 집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 3^n이다.

① 110 ② 112 ③ 114
④ 116 ⑤ 118

02

로그

28. 정수 집합의 부분집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$에 대하여 $a\in A$이면 $\log_a(x^2+2ax+5a)$는 모든 실수 x에서 정의된다. 이때, $\log_{a_1}a_2+2\log_{a_3}a_2^{-1}$의 값은? (단, $a_1<a_2<a_3$)

① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{2}\log_2 3$

④ $2\log_3 2$ ⑤ $2\log_2 3$

29. 0이 아닌 두 실수 x, y에 대하여 $\frac{1}{3x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$이고 $5^{3x}=6^y$일 때, $3x\log_{30}25+y\log_{30}216$의 값은?

① 25 ② 30 ③ 35

④ 40 ⑤ 45

30. 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킬 때, $(18c)^{9a}+(27c)^{9b}$의 값을 구하시오. (단, $c \neq 1$)

(가) $2^a=3^b=6^c$
(나) $\log_c(a+b)\times\log_9 c-1=\log_9 a+\log_9 b$

31. a, b, c는 모두 1이 아닌 양수이고, $\frac{\log ab}{2}=\frac{\log bc}{3}=\frac{\log ca}{4}$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\frac{c^2}{a}=b^x$을 만족시키는 상수 x의 값을 구하시오.

(2) $c+b^4=3(a+b^4)$이 성립할 때, a, b, c의 값을 각각 구하시오.

32. 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여

$$\log_a b + \log_a c = 2,\ \log_b c + \log_b a = 3$$

일 때, $\log_c a + \log_c b$의 값은?

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$

④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

33. 1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여 두 등식

$$\begin{cases} a^3b^4 = 8 \\ 4(\log_a c)^2 - 3(\log_b c)^2 = -(\log_a c)(\log_b c) \end{cases}$$

가 성립할 때, $\log_2 ab$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$

④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{9}{8}$

34. 2 이상의 두 자연수 a와 n에 대하여 두 집합

$A=\left\{a \,\middle|\, \log_4 a^2-\dfrac{1}{2}\log_2 \sqrt[3]{a}\text{는 25 이하의 자연수}\right\}$

$B=\{n \mid p\in A,\ q\in A,\ q\text{는 } p\text{의 } n\text{제곱근}\}$

일 때, 집합 B의 모든 원소의 합은?

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

35. 두 양수 a, b에 대하여 두 점

$\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}(\log_3 a,\ \log_3 b)$

를 지나는 직선과 직선 $y=\dfrac{1}{2}x-1$이 서로 수직이고 $\log_2 a-\log_2 9b=3$일 때, $12(a+b)$의 값은?

① 72　② 73　③ 74　④ 75　⑤ 76

36. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선이 원점을 지난다. $a^b + b^a = 20$일 때, $a^b \times b^a$의 값은?

① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

37. 두 상수 a, b에 대하여 원 $(x-\log_2 a)^2 + (y-\log_2 b)^2 = 2$와 직선 $x+y-1=0$이 접하고 $5\log_a 2 = \log_b 2$일 때, $\left(\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[5]{a}}\right)^8$의 값을 구하시오. (단, $0<a<1$, $0<b<1$이다.)

03

지수함수

63. 두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}-45$, $g(x)=5^{x+2}-k$에 대해 조건을 만족하는 모든 자연수 k의 개수는?

(가) 함수 $y=\lvert f(x)\rvert$의 그래프와 직선 $y=k$가 제1사분면에서 만난다. (나) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

64. 1보다 큰 자연수 a에 대하여 두 곡선

$$y=a^{x},\ y=\lvert a^{-x-1}-1\rvert$$

이 있다. 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

65. 좌표평면에서 직선 $y=a$ $(0<a<1)$가 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$, $y=3^x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $y=b$ $(b>1)$가 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$, $y=3^x$와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 점 P, Q, R, S는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{SR}}=2:1$
(나) 선분 PR의 중점의 y좌표는 $\frac{14}{9}$이다.

두 상수 a, b에 대하여 $18(b-a)$의 값은?

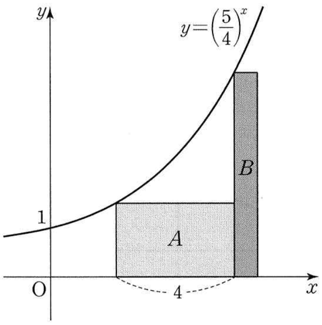
① 48 ② 50 ③ 52
④ 54 ⑤ 56

66. 함수 $f(x)=\left|2^x-4\right|$와 상수 k $(0<k<2)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 a의 범위가 $m<a<m+\log_2\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$일 때, $k\times m$의 값은? (단, m은 실수)

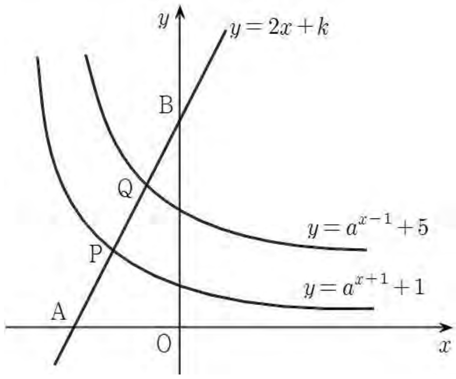
실수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$와 직선 $y=k$ 사이의 거리가 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$와 직선 $y=k$ 사이의 거리와 같도록 하는 $t<a$인 서로 다른 실수 t의 개수는 3이다.

① $3(-\sqrt{2}+2)$ ② $5(-\sqrt{2}+2)$ ③ $7(-\sqrt{2}+2)$
④ $8(\sqrt{2}-1)$ ⑤ $10(\sqrt{2}-1)$

67. 그림과 같이 함수 $y=\left(\frac{5}{4}\right)^x$의 그래프 위의 두 점을 각각 한 꼭짓점으로 하는 두 직사각형 A, B가 있다. 직사각형 A의 가로의 길이가 4일 때, 직사각형 A의 넓이가 직사각형 B의 넓이의 4배가 된다고 한다. 이때 직사각형 B의 가로의 길이를 구하시오. (단, 두 직사각형의 한 변은 x축 위에 놓여 있고, 한 꼭짓점을 공유한다.)



68. 그림과 같이 $0<a<1$, $k>0$인 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=2x+k$와 두 함수 $y=a^{x+1}+1$, $y=a^{x-1}+5$가 제2사분면에서 만난다. 직선 $y=2x+k$와 $y=a^{x+1}+1$, $y=a^{x-1}+5$의 교점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $y=2x+k$가 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{5}$이고 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QB}}=1:1:1$일 때, $a^3\times k$의 값은?

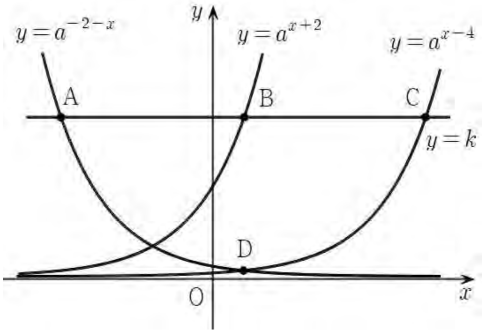


① 3 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 12

69. 다음 그림과 같이 세 곡선

$$y=a^{-2-x},\ y=a^{x+2},\ y=a^{x-4}$$

이 직선 $y=k$와 만나는 점을 각각 A, B, C라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이다. 두 곡선 $y=a^{-2-x}$과 $y=a^{x-4}$이 만나는 점 D에 대하여 삼각형 ACD의 넓이가 $\dfrac{45}{2}$일 때, 양수 a의 값은?

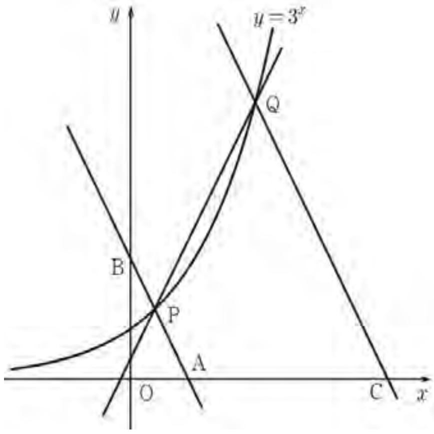


① $\sqrt[3]{4}$　　② $\sqrt{3}$　　③ 2
④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 3

70. 그림과 같이 곡선 $y=3^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 3^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 $4\sqrt[10]{3}$이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-4\sqrt[10]{3}$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B, 점 Q를 지나며 직선 AB와 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CQ}}=2:7:45$$

일 때, $5\times(a+b)$의 값은? (단, O는 원점, $0<a<b$)



① 3　　② 5　　③ 7
④ 9　　⑤ 11

04

로그함수

96. 함수 $f(x)=\log_2 x$에 대하여 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert f(b)-f(a)\rvert \le 1$ (나) $f(a+b)=2$

ab의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

97. 함수 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$에 대하여 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert f(a)-f(b)\rvert \le 1$ (나) $f(a+b)=-1$

ab의 최솟값을 m이라 할 때, $f(m)=-3-\log_{\frac{1}{2}} k$이다. 자연수 k의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

98. 두 곡선

$$y=\log_2 4x,\ y=\log_2 x-2$$

가 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 두 곡선이 직선 $x=16$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 곡선 $y=\log_2 4x$와 두 선분 AD, DC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 곡선 $y=\log_2 x-2$와 세 선분 BA, AC, CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 할 때, $S+T$의 값은?

① 90　② 92　③ 94　④ 96　⑤ 98

99. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=a^{x+2}$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 두 곡선 $y=a^{x+2}$와 $y=\log_a(x+2)$의 그래프가 직선 $l: y=-x+5$와 만나는 교점을 각각 A, B라 하고, 직선 l과 y축이 만나는 교점을 P, 직선 l과 x축이 만나는 교점을 Q라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BQ}}$이다. $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 x좌표와 y좌표의 값이 모두 자연수인 집합을 X라 할 때, 집합 X에 속한 서로 다른 모든 점의 y좌표의 값의 합을 구하시오.

100. $y=\log_2(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 함수를 $y=f(x)$라 하자. $y=f(x)$가 제1사분면을 지나는 k의 범위를 $m<k$라 할 때, m의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

101. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=b^x$의 그래프와 직선 $y=x$는 만나지 않을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

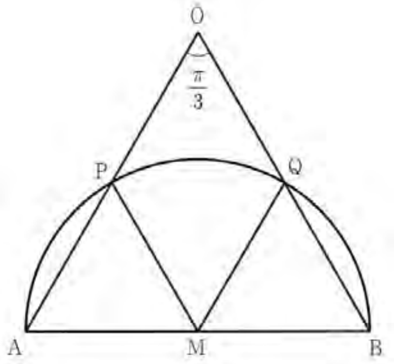
ㄱ. $a^a<a^b$
ㄴ. $\log_b(a-1)\times\log_b(a+1)>0$
ㄷ. $p^2+(\log_a p)^2=q^2+(\log_b q)^2$을 만족하는 서로 다른 두 실수 p, q $(p>1,\ q>1)$에 대하여 $\log_a p-p<\log_b q-q$가 항상 성립한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05

삼각함수의 정의

169. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=4$, $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$인 이등변삼각형 OAB가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 선분 OA와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P, 선분 OB와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 부채꼴 MPQ의 넓이는?



① $\frac{\pi}{3}$　② $\frac{2\pi}{3}$　③ π
④ $\frac{4\pi}{3}$　⑤ $\frac{5\pi}{3}$

170. 좌표평면에서 두 직선 $y=-\frac{1}{7}x$, $y=-7x$가 원 $x^2+y^2=36$과 제2사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 A$(6,\ 0)$에 대하여 중심이 원점 O인 두 부채꼴 OAP, OAQ의 호의 길이를 각각 l_1, l_2라 할 때, $\frac{l_1+l_2}{\pi}$의 값은? (단, 두 부채꼴 OAP, OAQ의 중심각의 크기는 모두 π보다 작다.)

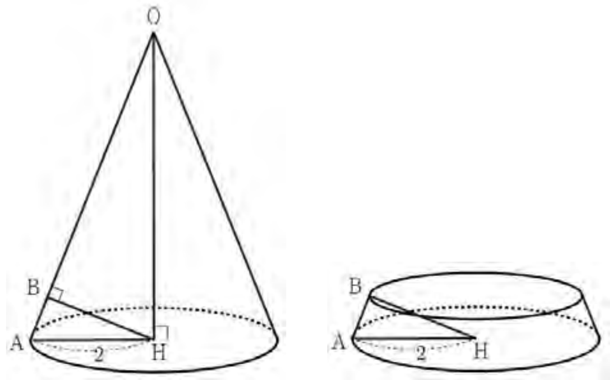
① 6　② 8　③ 9
④ 12　⑤ 24

171. 중심이 O이고 지름 AB의 길이가 4인 반원에서 지름에 평행한 현 CD에 대하여 $\angle \mathrm{AOC}=\theta \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 두 선분 BC, CD와 호 BD로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $S\left(\frac{\pi}{6}\right)+S\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $\sqrt{3}-1+\pi$ ② $\sqrt{3}-\frac{1}{2}+\pi$ ③ $\sqrt{3}+\pi$

④ $\sqrt{3}+\frac{1}{2}+\pi$ ⑤ $\sqrt{3}+1+\pi$

172. [그림1]과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2인 원뿔의 꼭짓점 O에서 밑면의 중심에 내린 수선의 발을 H라 하고, 밑면인 원 위의 점 A에 대하여 점 H에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overline{\mathrm{BH}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$이다. [그림2]는 [그림1]의 원뿔에서 원뿔 위의 점 B를 지나고 밑면과 평행한 평면으로 잘라서 만든 원뿔대이다. 이 원뿔대의 겉넓이는?



[그림1] [그림2]

① $\frac{\pi}{25}(19+19\sqrt{10})$ ② $\frac{\pi}{25}(181+19\sqrt{10})$

③ $\frac{\pi}{25}(181+181\sqrt{10})$ ④ $\frac{\pi}{100}(181+19\sqrt{10})$

⑤ $\frac{\pi}{100}(181+76\sqrt{10})$

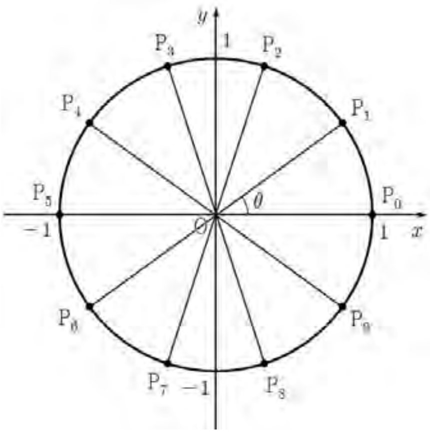
173. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때 두 등식

$$\sqrt{5}\sin\theta+a\cos\theta=\frac{4\sqrt{5}}{3},\ a\sin\theta-\sqrt{5}\cos\theta=-\frac{1}{3}$$

을 동시에 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

174. $\log_4 \sin x-\log_2 \cos x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log_2 3$을 만족시키는 x의 값을 구하시오. (단, $0\le x<2\pi$)

175. 그림과 같이 좌표평면 위의 단위원을 10등분하는 각 점을 차례대로 P_0, P_1, P_2, $\cdots$, P_9라 하자. 점 P_0의 좌표가 $(1, 0)$이고, $\angle P_0OP_1 = \theta$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta + \cdots + \tan 10\theta = 0$이다.

ㄴ. $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 9\theta = -1$이다.

ㄷ. $\sin\theta cos\dfrac{7}{2}\theta + \sin\dfrac{17}{2}\theta\cos\theta = -1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

176. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) $f(n) = \cos^2\dfrac{\pi}{2n} + \cos^2\dfrac{2}{2n}\pi + \cos^2\dfrac{3}{2n}\pi + \cdots + \cos^2\dfrac{(n-1)}{2n}\pi + \cos^2\dfrac{\pi}{2}$

(나) $g(n) = \sin^2\dfrac{(n+1)}{2n}\pi + \sin^2\dfrac{(n+2)}{2n}\pi + \sin^2\dfrac{(n+3)}{2n}\pi + \cdots + \sin^2\dfrac{(2n-1)}{2n}\pi + \sin^2\pi$

(다) $7 \le f(n) + g(n) \le 10$

177. 다음 <보기>에서 옳은 것의 개수는?

<보 기>

ㄱ. $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=1$

ㄴ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)-\tan\theta tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=1$

ㄷ. $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 90^\circ=45$

ㄹ. $\tan 1^\circ \times tan 2^\circ \times tan 3^\circ \times \cdots \times tan 89^\circ=1$

ㅁ. $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{2\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\cdots+\cos\frac{18\pi}{19}+\cos\frac{19\pi}{19}=-1$

ㅂ. $\cos^2\frac{\pi}{20}+\cos^2\frac{3\pi}{20}+\cos^2\frac{5\pi}{20}+\cos^2\frac{7\pi}{20}+\cos^2\frac{9\pi}{20}=\frac{5}{2}$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

178. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 서로 다른 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$에 대하여 두 동경 OP, OQ가 나타내는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.)

<보 기>

ㄱ. $x_1=x_2$이면 $\theta_1+\theta_2=2n\pi$이다. (n은 정수)

ㄴ. $y_1=y_2$이면 $\theta_1+\theta_2=2n\pi$이다. (n은 정수)

ㄷ. 두 점 P, Q가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $\theta_2=2\theta_1$이면 $\sin\theta_1=\frac{1}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

179. 좌표평면 위의 서로 다른 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$에 대하여 두 동경 OP, OQ가 나타내는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하자. 두 점 P, Q와 θ_1, θ_2가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan\theta_2$의 값은? (단, O는 원점이다.)

(가) $\theta_1 = 2\theta_2$
(나) $x_1y_1 < 0$, $(x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2=0$

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

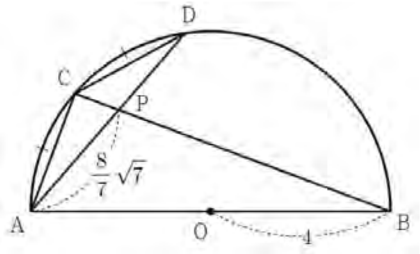
180. $x^2+y^2=1$의 그래프 위의 점 $P(a, b)$에 대해 x축의 양의 방향을 시초선으로 잡았을 때, 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. $\sqrt{\sin\theta}\times\sqrt{\cos\theta}=-\sqrt{\sin\theta cos\theta}$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점, 점 P는 축 위에 있지 않다.)

<보 기>

ㄱ. $ab<0$
ㄴ. $\frac{\sqrt{\tan\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=-\sqrt{\frac{1}{\cos\theta}}$
ㄷ. $p<\frac{b}{a-1}<q$를 만족하는 실수 p, q에 대해, $q-p$의 최댓값은 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

181. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하고, 반지름의 길이가 4인 반원 O가 있다. 호 AB 위에 $\widehat{\mathrm{AB}}=\widehat{\mathrm{CD}}$가 되도록 두 점 C, D를 잡고, 두 선분 AD와 BC가 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PA}}=\frac{8}{7}\sqrt{7}$일 때, $\sin(\angle\mathrm{CDP})$의 값은? $\left(\text{단, O는 반원 } O\text{의 중심, } 0<\angle\mathrm{CDP}<\frac{\pi}{4}\right)$



① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

182. 실수 m에 대하여 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 함수 $y=mx$의 그래프가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 P, x좌표가 음수인 점을 Q라 하고, 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 α, 동경 OQ가 나타내는 각의 크기를 β라 하자.

$$\sin\alpha\times\cos\beta=\frac{2}{5}$$

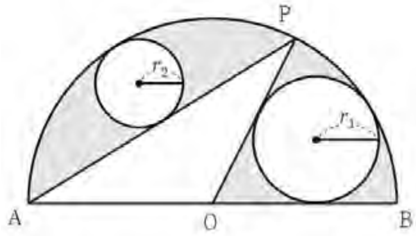
일 때 서로 다른 모든 m의 값의 합은? (단, O는 원점이다.)

① -5 ② $-\frac{5}{2}$ ③ 0
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 5

183. 좌표평면에서 원 $C_1 : x^2+y^2=4$ 위의 제1사분면에 있는 점 P와 한 점에서 만나며 x축에 동시에 접하는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심을 C, 원 C_1 위의 점 P에서의 접선 l과 y축이 만나는 점을 Q라 하자. 원 C_2의 반지름의 길이가 3일 때, tan(∠CQP)의 값은? (단, 점 C의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 크다.)

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

184. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P를 $\cos(\angle BAP)=\frac{4}{5}$가 되도록 잡는다. 부채꼴 OBP에 내접하는 원의 반지름의 길이가 r_1, 호 AP를 이등분하는 점과 선분 AP의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이가 r_2일 때, 색칠된 부분의 넓이가 $\frac{a}{400}\pi+\frac{b}{25}$일 때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)



185. 좌표평면에서 중심이 원점 O인 원 $x^2+y^2=9$ 위의 서로 다른 두 점 A(3, 0)와 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 선분 OA, OP에 의하여 나누어진 두 부채꼴의 넓이 중 작은 것은 $\frac{3}{2}\pi$이다.
(나) 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta > \frac{1}{\cos\theta sin\theta}$이다.

$\sin\theta-\tan\theta$의 값은?

① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

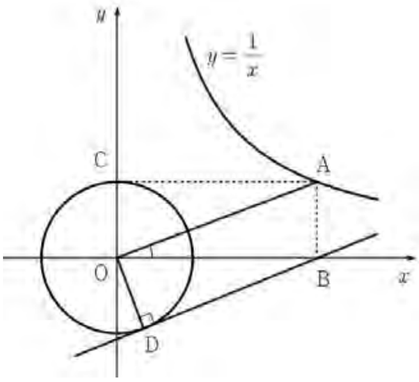
186. 원점 O와 원 $x^2+y^2=25$ 위의 서로 다른 두 점 A(5, 0), P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 원이 두 선분 OA, OP에 의해 두 부채꼴로 나누어질 때, 작은 부채꼴의 넓이는 $\frac{125}{12}\pi$이다.
(나) 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta < \frac{1}{\cos\theta\tan\theta}$이다.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\cos\theta+\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은?

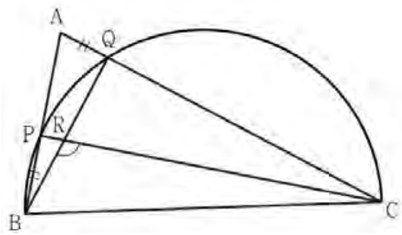
① $-2\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ 0
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

187. 그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ 위의 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하고, 점 O를 중심으로 하고 점 C를 지나는 원이 점 B를 지나는 직선과 접할 때의 접점을 D라 하자. $3^a=\sqrt[4]{15}$를 만족하는 실수 a에 대하여 $\tan(\angle\text{BOA})=9^{-a}$일 때, $\left(\frac{\overline{\text{BD}}}{\overline{\text{OA}}}\right)^2$의 값은? (단, O는 원점, 점 D는 제4사분면에 있다.)



① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{6}{7}$
④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

188. 그림과 같이 삼각형 ABC와 선분 BC를 지름으로 하는 반원에 대하여 선분 AB와 반원의 교점 중 B가 아닌 것을 P, 선분 AC와 반원의 교점 중 C가 아닌 것을 Q라 하자. 선분 BQ와 CP의 교점을 R라 하면 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

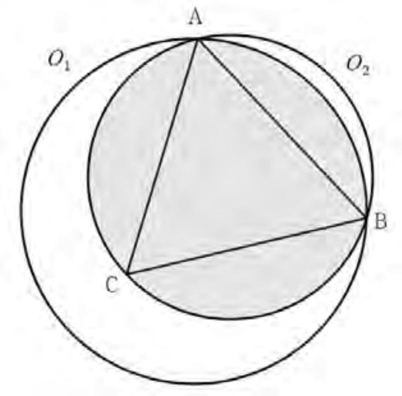


(가) $\overline{\text{BP}}=\overline{\text{AQ}}$
(나) $\cos(\angle\text{CRB})=-\frac{1}{3}$

$\overline{\text{BQ}}=\log_a b$이고 $\overline{\text{AC}}=\log_c b$일 때, $\log_c a$의 값은? (단, a, c는 1이 아닌 양수이다.)

① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{5}$

189. 그림과 같이 반지름의 길이가 8인 원 O_1이 있다. 원 O_1 위에 서로 다른 두 점 A, B를 $\overline{AB}=8\sqrt{2}$가 되도록 잡고, 원 O_1의 내부에 점 C를 삼각형 ACB가 정삼각형이 되도록 잡는다. 정삼각형 ACB의 외접원을 O_2라 할 때, 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이를 구하시오.



190. 평면 위에 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$인 두 점 A, B가 있다. 점 P가 조건을 만족시키며 움직이고 있다.

> (가) 세 점 A, B, P는 한 평면 위에 있다.
> (나) $\frac{\pi}{4} \leq \angle APB \leq \frac{\pi}{3}$

점 P가 나타내는 영역의 최대 넓이를 구하시오.

06

삼각함수의그래프

191. $0 < a \leq \frac{4}{7}$인 실수 a와 무리수 b에 대하여 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$ $\left(-\frac{\pi}{a} \leq x \leq \frac{2\pi}{a}\right)$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지날 때, ab의 값을 구하시오.

192. $0 < a < \frac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 $-\frac{\pi}{a} \leq x \leq \frac{2}{a}\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지날 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① $\sqrt{2}-1$ ② 2 ③ $\sqrt{2}+1$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ 3

193. 다음 보기 중 옳은 명제의 개수는?

<보 기>

ㄱ. $a \neq 0$일 때, $y=\sin ax$와 $y=\cos ax$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{a}$로 같다.

ㄴ. $y=\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)-2$의 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{n}{3}\pi+\dfrac{\pi}{3}$ (n은 정수)

ㄷ. $y=\sin|x|$는 주기함수이다.

ㄹ. $y=-4\cos(\pi+2x)-5$의 치역은 $\{y|-9 \le y \le -1\}$이고, 주기는 2이다.

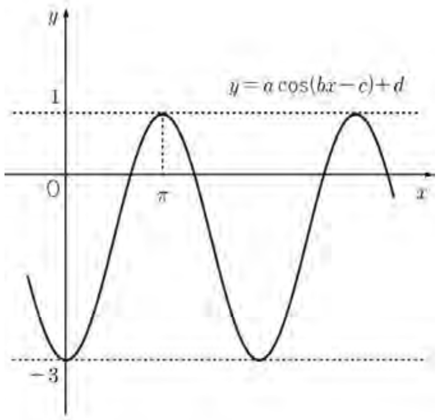
ㅁ. $y=3\sin x$와 $y=2|\tan 2x|-3$의 최솟값은 같다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

194. 함수 $y=k\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)+k^2-12$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

195. 그림은 함수 $y=a\cos(bx-c)+d$의 그래프이다. 네 실수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. (단, $-\pi \le c \le \pi$)



196. 함수 $f(x)=a\sin(bx-c)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 세 상수 a, b, c의 곱 $a\times b\times c$의 값은?

$\left(\text{단, } a>0,\ b>0,\ 0<c<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(가) $f(0)=-\dfrac{3}{2}$
(나) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+p)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값은 π이다.
(다) x에 대한 방정식 $f(x)=3$은 $0\le x<\pi$에서 한 개의 실근만을 갖는다.

① $\dfrac{\pi}{2}$　② $\dfrac{2\pi}{3}$　③ π　④ $\dfrac{3\pi}{2}$　⑤ 2π

197. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$인 θ에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

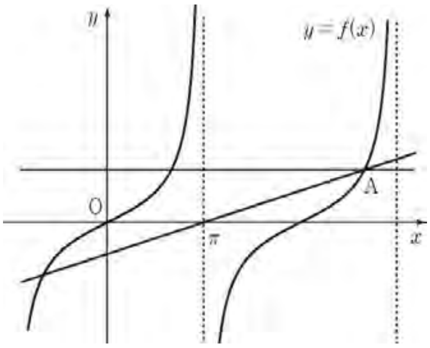
ㄱ. $0<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<1$

ㄴ. $\log_{\sin\theta}\cos\theta<\log_{\sin\theta}\cos 2\theta$

ㄷ. $(\sin\theta)^{-\cos 2\theta}<(\sin\theta)^{-\cos\theta}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

198. $-\pi<x<3\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{2}$가 있다. 그림과 같이 직선 $y=m(x-\pi)$ $(m>0)$이 $y=f(x)$와 제1사분면에서 만나는 점을 A라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=m(x-\pi)$, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $2\sqrt{3}\pi$일 때, m의 값은?



① $\frac{1}{5\pi}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{5\pi}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{5\pi}$
④ $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{5\pi}$

1. [정답] ③
2. [정답] ①
3. [정답] 49
4. [정답] ③
5. [정답] ①
6. [정답] ③
7. [정답] ⑤
8. [정답] ①
9. [정답] -4
10. [정답] ②
11. [정답] ②
12. [정답] ①
13. [정답] 30
14. [정답] ④
15. [정답] ②
16. [정답] 52
17. [정답] ⑤
18. [정답] ⑤
19. [정답] $(2, 32)$, $(2, -32)$, $(5, 4)$, $(10, 2)$, $(10, -2)$
20. [정답] 12
21. [정답] ①
22. [정답] ②
23. [정답] ③
24. [정답] ⑤
25. [정답] ①
26. [정답] ②
27. [정답] ④
28. [정답] ①
29. [정답] ①
30. [정답] 12
31. [정답] (1) 7 (2) 27, 3, 243
32. [정답] ②
33. [정답] ④
34. [정답] ②
35. [정답] ②
36. [정답] ③
37. [정답] 2
38. [정답] ④
39. [정답] ③
40. [정답] ③
41. [정답] ④
42. [정답] ⑤
43. [정답] 9, 169
44. [정답] 7
45. [정답] 7
46. [정답] ①
47. [정답] ④
48. [정답] ②
49. [정답] ①
50. [정답] 3
51. [정답] ②
52. [정답] ④
53. [정답] 37
54. [정답] 34
55. [정답] 64
56. [정답] ①
57. [정답] 65
58. [정답] ④
59. [정답] 96
60. [정답] ⑤
61. [정답] ④
62. [정답] 2
63. [정답] ③
64. [정답] ④
65. [정답] ③
66. [정답] ⑤
67. [정답] $\frac{256}{625}$
68. [정답] ②
69. [정답] ①
70. [정답] ⑤
71. [정답] ②
72. [정답] ①
73. [정답] ⑤
74. [정답] 72
75. [정답] 2
76. [정답] ④
77. [정답] ③
78. [정답] ③
79. [정답] 4
80. [정답] ③
81. [정답] (1) $(a^2+a+1)^2$ (2) $\frac{9}{16} \le m < 1$
82. [정답] 191
83. [정답] 33
84. [정답] 3
85. [정답] $0 < a < \frac{1}{3}$, $8 < a < 9$
86. [정답] ⑤
87. [정답] 6
88. [정답] ③
89. [정답] -3, 0
90. [정답] $-\frac{6}{5} \le k \le 6$
91. [정답] ④
92. [정답] ②
93. [정답] ②
94. [정답] ⑤
95. [정답] 384
96. [정답] ①
97. [정답] ④
98. [정답] ①
99. [정답] 52
100. [정답] ①
101. [정답] ①
102. [정답] ③
103. [정답] ③
104. [정답] (1) 해설참조 (2) 해설참조 (3) $0 < k < \frac{1}{3}$
105. [정답] ②
106. [정답] 42
107. [정답] 10
108. [정답] ③
109. [정답] ⑤

110. [정답] ①
111. [정답] ⑤
112. [정답] ⑤
113. [정답] (1) $\sqrt[3]{2}$ (2) 40 (3) $\frac{80}{3}$
114. [정답] $\frac{21}{2}$
115. [정답] ②
116. [정답] ④
117. [정답] ⑤
118. [정답] $\frac{1}{2}$
119. [정답] 20
120. [정답] ⑤
121. [정답] ④
122. [정답] ⑤
123. [정답] ①
124. [정답] ⑤
125. [정답] (1) 해설참조 (2) $(3^{n+1}-1)^2$ (3) $\frac{3^{12}-29}{2}$
126. [정답] 7
127. [정답] ②
128. [정답] ①
129. [정답] ①
130. [정답] $\frac{10}{9}$
131. [정답] 25
132. [정답] ②
133. [정답] ④
134. [정답] 9
135. [정답] ④
136. [정답] ②
137. [정답] ②
138. [정답] 30
139. [정답] ②
140. [정답] ③
141. [정답] ①
142. [정답] ⑤
143. [정답] ①
144. [정답] ①
145. [정답] ③
146. [정답] ①
147. [정답] ①
148. [정답] ⑤
149. [정답] ④
150. [정답] ④
151. [정답] ④
152. [정답] ④
153. [정답] 16
154. [정답] 13
155. [정답] ④
156. [정답] ②
157. [정답] ①
158. [정답] 9, 17
159. [정답] ④
160. [정답] ③
161. [정답] 80
162. [정답] ①
163. [정답] ⑤
164. [정답] ④
165. [정답] 24
166. [정답] ③
167. [정답] ⑤
168. [정답] ③
169. [정답] ②
170. [정답] ③
171. [정답] ①
172. [정답] ②
173. [정답] 2
174. [정답] $\frac{\pi}{3}$
175. [정답] ⑤
176. [정답] 38
177. [정답] ③
178. [정답] ①
179. [정답] ⑤
180. [정답] ②
181. [정답] ①
182. [정답] ②
183. [정답] ①
184. [정답] 463
185. [정답] ③
186. [정답] ④
187. [정답] ④
188. [정답] ④
189. [정답] $-32+\frac{32}{3}\sqrt{3}+\frac{400\pi}{9}$
190. [정답] $\frac{44}{3}\pi+24-8\sqrt{3}$
191. [정답] $\frac{\sqrt{2}}{2}$
192. [정답] ②
193. [정답] ②
194. [정답] ③
195. [정답] 6
196. [정답] ③
197. [정답] ④
198. [정답] ④
199. [정답] $\frac{39}{4}$
200. [정답] ⑤
201. [정답] -4
202. [정답] ①
203. [정답] ②
204. [정답] ③
205. [정답] $\frac{2}{3}\pi$
206. [정답] ⑤
207. [정답] ①
208. [정답] ③
209. [정답] 15
210. [정답] 23
211. [정답] ④
212. [정답] ①
213. [정답] (1) -3, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, 2 (2) 3

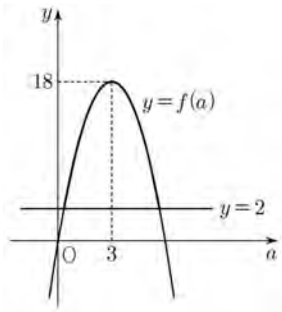
214. [정답] 20
215. [정답] ②
216. [정답] 6
217. [정답] ③
218. [정답] (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) 해설참조 (3) 10
219. [정답] $2 < a \leq 3$
220. [정답] $\frac{16}{7}$
221. [정답] $\frac{2}{25}$
222. [정답] ②
223. [정답] ③
224. [정답] ④
225. [정답] ①
226. [정답] 7
227. [정답] $\frac{7}{2}$
228. [정답] ③
229. [정답] $4\sqrt{3}$, 3
230. [정답] 109
231. [정답] ②
232. [정답] ③
233. [정답] $\frac{8}{15}$
234. [정답] ④
235. [정답] $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
236. [정답] ④
237. [정답] $-2k$
238. [정답] 24
239. [정답] ①
240. [정답] ③
241. [정답] ④
242. [정답] ②
243. [정답] ③

1. [정답] ③

[해설]

$$f(a)=12a-2a^2=-2(a-3)^2+18$$

($2 \le f(a) \le 18$인 자연수)이라 하면 함수 $y=f(a)$의 그래프는 다음과 같다.



조건 (나)에서

$b^n=12a-2a^2=f(a)$ (b는 정수, $n \ge 2$인 자연수)이므로

n이 짝수이면 $b=\pm\sqrt[n]{f(a)}$

n이 홀수이면 $b=\sqrt[n]{f(a)}$

이다.

(i) $n=2$일 때, $f(a)=2^2,\ 3^2,\ 4^2$

a의 경우의 수는 6

b의 경우의 수는 2

순서쌍의 개수는 $6\times2=12$

(ii) $n=3$일 때, $f(a)=2^3$

a의 경우의 수는 2

b의 경우의 수는 1

순서쌍의 개수는 $2\times1=2$

(iii) $n=4$일 때, $f(a)=2^4$

a의 경우의 수는 2

b의 경우의 수는 2

순서쌍의 개수는 $2\times2=4$

이상에서 순서쌍 (a, b, n)의 경우의 수는

$$12+2+4=18$$

2. [정답] ①

[해설]

(i) n이 홀수일 때

$f(n)=1$

(ii) n이 짝수일 때

(1) $n^2-2n-8>0$에서

$(n+2)(n-4)>0,\quad n>4$

$n>4$일 때 $f(n)=2$

(2) $n^2-2n-8=0$에서

$n=4$일 때 $f(n)=1$

(3) $n^2-2n-8<0$에서

$n<4$일 때 $f(n)=0$

(i)과 (ii)에서

$$f(2)+f(3)+f(5)+f(6)=0+1+1+2=4$$

3. [정답] 49

[해설]

$|m| \le 5$에서 $-5 \le m \le 5$

$|n| \le 5$에서 $-5 \le n \le 5$

$m^n-n^m<0$이고 $(mn+3n-2m)$이 짝수인 경우 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다.

(i) 두 정수 m, n중 하나가 0인 경우

(1) $m=0$일 때,

n은 1, 2, 3, 4, 5가 가능하고,

$m^n-n^m<0$이므로 n이 2, 4인 경우 $(mn+3n-2m)$이 짝수이므로 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근은 존재하지 않는다.

따라서 조건을 모두 만족하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 3이다.

(2) $n=0$일 때 조건을 만족하는 양수 m은 없다.

(ii) 두 정수 m, n이 모두 0이 아닌 경우

$mn+3n-2m \ge 2$를 만족시키는 정수 중에서 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하지 않는 경우를 제외시키면

(1) $m=-5$일 때,

$-5 \le n \le 4$에서 $m^n-n^m<0$이고 $(mn+3n-2m)$이 짝수인 경우는 $n=-3$, 1, 3일 때이므로 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하는 경우는

$9-3=6$

(2) $m=-4$일 때,

$-5 \le n \le 5$에서 모든 n의 값에 대하여 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하므로

10

(3) $m=-3$일 때,

$-5 \le n \le 5$에서 $m^n-n^m<0$이고 $(mn+3n-2m)$이 짝수인 경우는 $n=1$, 3, 5일 때이므로 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하는 경우는

$10-3=7$

(4) $m=-2$일 때,

$-2 \le n \le 5$에서 모든 n의 값에 대하여 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하므로

7

(5) $m=-1$일 때,

$1 \le n \le 5$에서 $m^n-n^m<0$이고 $(mn+3n-2m)$이 짝수인 경우는 $n=1$, 3, 5일 때이므로 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하는 경우는

$5-3=2$

(6) $m=1$일 때,

$1 \le n \le 5$에서 $m^n-n^m<0$이고 $(mn+3n-2m)$이 짝수인 경우는 $n=2$, 3, 4, 5일 때이므로 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하는 경우는

$5-4=1$

(7) $m=2$일 때,

$2 \le n \le 5$에서 모든 n의 값에 대하여 m^n-n^m의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하므로

4

(8) $m=3$일 때,

$2 \le n \le 5$에서 모든 n의 값에 대하여 m^n-n^m의

$(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하므로

4

(9) $m=4$일 때,

$2 \le n \le 5$에서 모든 n의 값에 대하여 $m^n - n^m$의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하므로

4

(10) $m=5$일 때,

$2 \le n \le 5$에서 $m^n - n^m < 0$이고 $(mn+3n-2m)$이 짝수인 경우는 $n=2,\ 3,\ 4$일 때이므로 $m^n - n^m$의 $(mn+3n-2m)$제곱근이 존재하는 경우는

$4-3=1$

(i), (ii)에서 모든 조건을 만족하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$3+6+10+7+7+2+1+4+4+4+1=49$

4. [정답] ③

[해설]

$g(x)=(k-x)(k^2-xk+3x)$라 두면

(i) $k=2$일 때

$g(x)=-(x-2)(x+4)$

$g(x)$의 제곱근이 실수가 되려면 $g(x) \ge 0$이어야 한다.

$$\therefore\ f(2)=\begin{cases} 2 & (x=1) \\ 1 & (x=2) \\ 0 & (3 \le x \le 20) \end{cases}$$

(ii) $k=3$일 때

$g(x)=-9(x-3)$

모든 x에 대하여 $g(x)$의 세제곱근은 하나의 실수를 갖는다.

$\therefore\ f(3)=1$

(iii) $k=4$일 때

$g(x)=(x-4)(x-16)$

$g(x)$의 네제곱근이 실수가 되려면 $g(x) \ge 0$이어야 한다.

$$\therefore\ f(4)=\begin{cases} 2 & (1 \le x \le 3,\ 17 \le x \le 20) \\ 1 & (x=4,\ x=16) \\ 0 & (5 \le x \le 15) \end{cases}$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(2)+f(3)+f(4)=f(2)+f(4)+1$이므로

$f(2)+f(4)=2$

$f(2)=0,\ f(4)=2$를 만족시키는 x의 값은 3 또는 $17 \le x \le 20$이고, $f(2)=f(4)=1$ 또는 $f(2)=2,\ f(4)=0$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로 조건을 만족시키는 x의 값은 $3,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20$에서 그 합은

$3+17+18+19+20=77$

5. [정답] ①

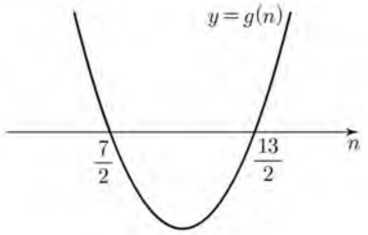
[해설]

$x^n=b$, 즉 x가 b의 n제곱근일 때 실수 x의 값의 개수는

	$b>0$	$b=0$	$b<0$
n이 짝수	2개	1개	0개
n이 홀수	1개		

$g(n)=4n^2-40n+91$이라 하면

$4n^2-40n+91=(2n-7)(2n-13)$이므로 함수 $y=g(n)$의 그래프는 다음과 같다.



$g(n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, n에 따른 $f(n)$의 값은

$n=2$일 때, $g(n)>0$ $\therefore\ f(n)=2$

$n=3$일 때, $g(n)>0$ $\therefore\ f(n)=1$

$n=4$일 때, $g(n)<0$ $\therefore\ f(n)=0$

$n=5$일 때, $g(n)<0$ $\therefore\ f(n)=1$

$n=6$일 때, $g(n)<0$ $\therefore\ f(n)=0$

$n \ge 7$일 때, $\begin{cases} n\text{ 이 짝수} & f(n)=2 \\ n\text{ 이 홀수} & f(n)=1 \end{cases}$

따라서 $f(n) \ne f(n+2)$인 자연수 n의 값은 $2,\ 6$이므로 n의 값의 합은 8이다.

6. [정답] ③

[해설]

(i) $n=2k$(단, k는 자연수)일 때

$$f_n(a)=\begin{cases} 2 & (a>0) \\ 1 & (a=0) \\ 0 & (a<0) \end{cases}$$

(ii) $n=2k+1$(단, k는 자연수)일 때

$f_n(a)=1$

ㄱ. $f_3((x+2)(x-3))=1$이므로 $f_4((x+2)(x-3))=0$

$\therefore\ (x+2)(x-3)<0,\quad -2<x<3$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$에서 개수는 4이다. (참)

ㄴ. $a<0$일 때 $f_{2n+1}(a)=1,\ f_{2n}(a)=0$이므로

$f_{2n+1}(a)-f_{2n}(a)=1$ (거짓)

ㄷ. $x>0$일 때 $f_n(x)=\begin{cases} 2 & (n=2k) \\ 1 & (n=2k+1) \end{cases}$(단, k는 자연수)

$f_a(b) \ne f_b(a)$이므로 $a,\ b$의 값 중 하나는 짝수, 나머지 하나는 홀수이다.

따라서 $a+b$는 홀수, ab는 짝수이므로

$f_{a+b}(b)=1,\ f_{ab}(a)=2$

$\therefore\ f_{a+b}(b)<f_{ab}(a)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7. [정답] ⑤

[해설]

$(\sqrt{2})^{-(n-3)^2+k}$에서 $f(n)=-(n-3)^2+k$라 하면

$\sqrt{2}^{\,f(n)}>0$이므로 $\sqrt{2}^{\,f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}^{\,f(n)}}=2^{\frac{f(n)}{8}},\ -\sqrt[4]{\sqrt{2}^{\,f(n)}}=-2^{\frac{f(n)}{8}}$$

네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -8이므로

$$2^{\frac{f(n)}{8}}\times\left(-2^{\frac{f(n)}{8}}\right)=-8,\qquad -2^{\frac{f(n)}{4}}=-8$$

$$\frac{f(n)}{4}=3 \qquad \therefore f(n)=12$$

$f(n)=12$를 만족하는 자연수 n의 개수가 2개인데 함수 $f(n)$의 축이 $n=3$이므로 만족하는 자연수 n은 1, 5 또는 2, 4이다.

(ⅰ) n이 1, 5일 때

$f(1)=12,\ f(5)=12$에서 $\quad -4+k=12 \quad \therefore k=16$

(ⅱ) n이 2, 4일 때

$f(2)=12,\ f(4)=12$에서 $\quad -1+k=12 \quad \therefore k=13$

(ⅰ), (ⅱ)에서 k의 값의 합은 $\quad 16+13=29$

8. [정답] ①

[해설]

두 집합 $A=\{2, 3\}$, $B=\left\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3, 9\right\}$에 대하여 집합 $X=\{x\,|\,x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x\text{는 실수}\}$이다.

집합 X의 원소는

$x^2=b$ 또는 $x^3=b$ (단, $b\in B$)

인 실수 x이다.

(ⅰ) $x^2=b$

$x^2=b$인 실수 x의 값이 존재하면 $\quad b\ge 0$

$b=\frac{1}{3}$ 또는 $b=3$ 또는 $b=9$

이때 방정식 $x^2=b$에서 $\quad x=\pm\sqrt{b}$

$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\pm3$

따라서 $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\pm\sqrt{3}$, ±3은 집합 X의 원소이다.

(ⅱ) $x^3=b$

$x^3=b$인 실수 x는 $\quad x=\sqrt[3]{b}$

$x=\sqrt[3]{-3}$ 또는 $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$ 또는 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ 또는 $x=\sqrt[3]{3}$ 또는 $x=\sqrt[3]{9}$

$\therefore x=\pm\sqrt[3]{3}$ 또는 $x=\pm\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $x=\sqrt[3]{9}$

따라서 $\pm\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $\pm\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$는 집합 X의 원소이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 집합 X의 원소의 개수는

$m=6+5=11$

집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은

$$\begin{aligned}3^n&=\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{3}\times3\times\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\\&=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{3}\right)\times3\times\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\times\sqrt[3]{3}\right)\times\sqrt[3]{9}\\&=1\times3\times1\times\sqrt[3]{9}\\&=3\times\sqrt[3]{3^2}\\&=3^{1+\frac{2}{3}}\\&=3^{\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

따라서 $n=\frac{5}{3}$이다.

$$\therefore 6m\times n=6\times11\times\frac{5}{3}=110$$

9. [정답] -4

[해설]

$x^a=y^b=x^2y=k\,(k\ne1)$라 두면 $\quad x=k^{\frac{1}{a}}$, $\quad y=k^{\frac{1}{b}}$이므로

$x^2y=k$에서

$k^{\frac{2}{a}}k^{\frac{1}{b}}=k \quad \therefore \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1 \quad a+2b=ab$

등식의 양변을 제곱하면

$a^2+4ab+4b^2=a^2b^2 \quad \therefore a^2+4b^2-a^2b^2=-4ab$

$$\therefore \frac{a^2+4b^2-a^2b^2}{a+2b}=\frac{-4ab}{ab}=-4$$

10. [정답] ②

[해설]

$1<a<b<c$이므로

(ⅰ) $Y=a^{\frac{a}{c-1}}b^{\frac{a}{b+1}}$, $Z=a^{\frac{a}{b-1}}b^{\frac{b}{a+1}}$에서

$c-1>b-1$이므로 $\quad a^{\frac{a}{c-1}}<a^{\frac{a}{b-1}}$

$a<b$이고 $b+1>a+1$이므로 $\quad b^{\frac{a}{b+1}}<b^{\frac{b}{a+1}}$

$\therefore Y<Z$

(ⅱ) $X=b^{\frac{c}{a-1}}c^{\frac{b}{a-1}}$, $Z=a^{\frac{a}{b-1}}b^{\frac{b}{a+1}}$에서

$a-1<a+1$, $c>b$이므로 $\quad b^{\frac{c}{a-1}}>b^{\frac{b}{a+1}}$

$a-1<b-1$, $a<b<c$이므로 $\quad c^{\frac{b}{a-1}}>a^{\frac{a}{b-1}}$

$\therefore X>Z$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad Y<Z<X$

11. [정답] ②

[해설]

1보다 큰 자연수 n과 두 실수 a, b에 대하여 $0<a<1<b$, $ab<1$일 때

(ⅰ) $\frac{A}{B}=a^{\frac{n+2}{n+1}-\frac{n-1}{n}}\times b^{\frac{n-1}{n}-1}$

$=a^{\frac{2n+1}{n(n+1)}}\times b^{-\frac{1}{n}}$

$=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n+1}}<1 \quad \left(\because 0<\frac{a}{b}<1,\ 0<a<1\right)$

$\therefore A<B$

(ⅱ) $\frac{B}{C}=a^{\frac{n-1}{n}-1}\times b^{1-\frac{n+2}{n+1}}$

$=a^{-\frac{1}{n}}\times b^{-\frac{1}{n+1}}$

$$=\left(\frac{1}{ab}\right)^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n(n+1)}}>1\ \left(\because\ \frac{1}{ab}>1,\ b>1\right)$$

$\therefore\ C<B$

(iii) $\dfrac{C}{A}=a^{1-\frac{n+2}{n+1}}\times b^{\frac{n+2}{n+1}-\frac{n-1}{n}}$

$$=a^{-\frac{1}{n+1}}\times b^{\frac{2n+1}{n(n+1)}}$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}\times b^{\frac{1}{n}}>1\ \left(\because\ \frac{b}{a}>1,\ b>1\right)$$

$\therefore\ A<C$

이상에서 대소관계로 옳은 것은 $A<C<B$이다.

12. [정답] ①

[해설]

$a=2^{\sqrt{5}}$, $b=3^{\sqrt{3}}$, $c=5^{\sqrt{2}}$에서

a와 b의 대소관계를 비교하면 각각 $\sqrt{3}$제곱을 하면

$3^3>2^4>2^{\sqrt{15}}$, $\quad a<b$ …… ㉠

a와 c의 대소관계를 비교하면 각각 $\sqrt{2}$제곱을 하면

$5^2>2^4>2^{\sqrt{10}}$, $\quad a<c$ …… ㉡

b와 c의 대소관계를 비교하면 각각 $\sqrt{2}$제곱을 하면

$b^{\sqrt{2}}=3^{\sqrt{6}}$, $\quad c^{\sqrt{2}}=5^2$

$2<\sqrt{6}<3$에서 $\dfrac{5}{2}>\sqrt{6}$인데 $3^{\frac{5}{2}}<5^2$이다.

$3^{\sqrt{6}}<3^{\frac{5}{2}}<5^2$, $\quad b<c$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $a<b<c$이다.

13. [정답] 30

[해설]

$a=7^{\frac{1}{2}}$, $b=13^{\frac{1}{5}}$, $c=15^{\frac{1}{6}}$이므로

$$(abc)^n=\left(7^{\frac{1}{2}}\times 13^{\frac{1}{5}}\times 15^{\frac{1}{6}}\right)^n$$

이 값이 자연수가 되기 위한 n의 최솟값은 2, 5, 6의 최소공배수이어야 한다.

$\therefore\ n=30$

14. [정답] ④

[해설]

100이하의 자연수 m에 대하여

$$12^{\frac{m+2}{3}}\times 3^{\frac{3m-1}{2}}=4^{\frac{m+2}{3}}\times 3^{\frac{m+2}{3}}\times 3^{\frac{3m-1}{2}}$$

$$=2^{\frac{2(m+2)}{3}}\times 3^{\frac{11m+1}{6}}$$

이 값이 자연수가 되기 위해서는 $\dfrac{2(m+2)}{3}$, $\dfrac{11m+1}{6}$가 모두 정수가 되어야 한다.

$m+2$가 3의 배수이어야 하므로

$m=1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \cdots$ …… ㉠

$11m+1$이 6의 배수이어야 하므로

$m=1,\ 7,\ 13,\ 19,\ 25,\ \cdots$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 m의 값은 $1,\ 7,\ 13,\ \cdots$ 이므로

$m=6k-5$(단, k는 자연수)

$6k-5\le 100$에서 $\quad k\le 17+\dfrac{1}{2}\quad \therefore\ k=17$

따라서 100이하의 자연수 m의 최댓값은

$6\times 17-5=97$

15. [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서

$$\sqrt{\frac{3^a\times 7^b}{3}}=\sqrt{3^{a-1}\times 7^b}$$

이므로

$a-1=2k$(단, k는 자연수), …… ㉠

$b=2l$(단, l은 자연수) …… ㉡

또한 $\sqrt[3]{2^b\times 5^{a+1}}$에서

$a+1=3k'$(단, k'는 자연수), …… ㉢

$b=3l'$(단, l'는 자연수) …… ㉣

㉠에서

$a+1=2(k+1)$ …… ㉤

이므로 ㉤, ㉢에서 $\quad a+1=6k''$(단, k''는 자연수)

$\therefore\ a=6k''-1$

㉡, ㉣에서 $\quad b=6l''$

조건 (나)에서 $10\le a\le 20$이므로 $\quad a=11$ 또는 $a=17$

또한 $5\le b\le 15$이므로 $\quad b=6$ 또는 $b=12$

조건 (다)에서 $\quad \sqrt{(a-17)^2+(b-0)^2}\le 12$

$\therefore\ (a-17)^2+b^2\le 144$ …… ㉥

부등식 ㉥을 만족시키는 순서쌍 (a,b)는

$(11,6)$, $(17,6)$, $(17,12)$

$\therefore\ M=17+12=29$, $m=11+6=17$

$\therefore\ M+m=29+17=46$

16. [정답] 52

[해설]

2 이상의 두 자연수 l, m에 대하여 32의 l제곱근 중 실수인 것을 a, 625의 m제곱근 중 실수인 것을 b라 하면

$a^l=32$, $b^m=625$

이때 a^4b^3이 자연수가 되려면 $\quad b>0$

(ⅰ) l, m이 모두 홀수일 때

$a=2^{\frac{5}{l}}(a>0)$, $\quad b=5^{\frac{4}{m}}$이고 $\quad a^4b^3=2^{\frac{20}{l}}5^{\frac{12}{m}}$이므로 $\quad a^4b^3$이 자연수가 되려면 l은 20의 양의 약수 중 2 이상의 홀수, m은 12의 양의 약수 중 2 이상의 홀수이다.

즉 $l=5$, $m=3$이므로 순서쌍 (a,b)는 $\left(2,\ 5^{\frac{4}{3}}\right)$의 한 개다.

이때 $a^4=2^4$, $b^3=5^4$에서

$\log a^4b^3=\log(10)^4=4$

$\therefore\ 4\in B$

(ii) l이 홀수, m이 짝수일 때

$a=2^{\frac{5}{l}}(a>0)$, $b=5^{\frac{4}{m}}$이고 $a^4b^3=2^{\frac{20}{l}}5^{\frac{12}{m}}$이므로 a^4b^3이 자연수가 되려면 l은 20의 양의 약수 중 2 이상의 홀수이고, m은 12의 양의 약수 중 2 이상의 짝수이다.

즉 l, m의 순서쌍 (l, m)은 $(5, 2)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$, $(5, 12)$이므로 가능한 순서쌍 (a, b)는

$(2, 5^2)$, $(2, 5)$, $\left(2, 5^{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(2, 5^{\frac{1}{3}}\right)$

의 4개이고 a^4, b^3의 순서쌍 (a^4, b^3)은 $(2^4, 5^6)$, $(2^4, 5^3)$, $(2^4, 5^2)$, $(2^4, 5)$의 4개다. 이때 $\log a^4b^3$이 자연수가 되도록 하는 a, b는 존재하지 않는다.

(iii) l이 짝수, m이 홀수일 때

$a=\pm 2^{\frac{5}{l}}$, $b=5^{\frac{4}{m}}$이고 $a^4b^3=2^{\frac{20}{l}}5^{\frac{12}{m}}$이므로 a^4b^3이 자연수가 되려면 l은 20의 양의 약수 중 2 이상의 짝수이고, m은 12의 양의 약수 중 2 이상의 홀수이다.

즉 l, m의 순서쌍 (l, m)은 $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(10, 3)$, $(20, 3)$이므로 가능한 순서쌍 (a, b)는

$\left(2^{\frac{5}{2}}, 5^{\frac{4}{3}}\right)$, $\left(-2^{\frac{5}{2}}, 5^{\frac{4}{3}}\right)$, $\left(2^{\frac{5}{4}}, 5^{\frac{4}{3}}\right)$, $\left(-2^{\frac{5}{4}}, 5^{\frac{4}{3}}\right)$

$\left(2^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{4}{3}}\right)$, $\left(-2^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{4}{3}}\right)$, $\left(2^{\frac{1}{4}}, 5^{\frac{4}{3}}\right)$, $\left(-2^{\frac{1}{4}}, 5^{\frac{4}{3}}\right)$

의 8개이고 a^4, b^3의 순서쌍 (a^4, b^3)은

$(2^{10}, 5^4)$, $(2^5, 5^4)$, $(2^2, 5^4)$, $(2, 5^4)$

이다. 이때 $\log a^4b^3$이 자연수가 되도록 하는 a, b는 존재하지 않는다.

(iv) l, m이 모두 짝수일 때

$a=\pm 2^{\frac{5}{l}}$, $b=5^{\frac{4}{m}}$이고 $a^4b^3=2^{\frac{20}{l}}5^{\frac{12}{m}}$가 자연수가 되려면 l은 20의 양의 약수 중 2 이상의 짝수이고, m은 12의 양의 약수 중 2 이상의 짝수이다.

즉 l, m의 순서쌍 (l, m)은

$(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(2, 12)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(4, 6)$, $(4, 12)$, $(10, 2)$, $(10, 4)$, $(10, 6)$, $(10, 12)$, $(20, 2)$, $(20, 4)$, $(20, 6)$, $(20, 12)$

의 16개이고 각각에 대한 a의 값이 양수 또는 음수 모두 성립하므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $16\times 2=32$이다.

이때 a^4, b^3의 순서쌍 (a^4, b^3)은

$(2^{10}, 5^6)$, $(2^{10}, 5^3)$, $(2^{10}, 5^2)$, $(2^{10}, 5)$, $(2^5, 5^6)$, $(2^5, 5^3)$, $(2^5, 5^2)$, $(2^5, 5)$, $(2^2, 5^6)$, $(2^2, 5^3)$, $(2^2, 5^2)$, $(2^2, 5)$, $(2, 5^6)$, $(2, 5^3)$, $(2, 5^2)$, $(2, 5)$

이다. 이때 $\log a^4b^3$이 자연수가 되려면 $a^4=2^2$, $b^3=5^2$ 또는 $a^4=2$, $b^3=5$에서

$\log a^4b^3=\log(10)^2=2$ 또는 $\log a^4b^3=\log 10=1$

$\therefore\ 2\in B$, $1\in B$

이상에서 집합 A의 원소의 개수는

$1+4+8+32=45$

이고 $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$n(A)=45$, $S=1+2+4=7$

$\therefore\ n(A)+S=45+7=52$

17. [정답] ⑤

[해설]

$\sqrt[3]{3m^2}$이 자연수이므로

$3m^2=k^3$(k는 자연수), ... ㉠

$3m^2$은 3의 배수이므로 k는 3의 배수이다.

$\therefore\ 3m^2=(3l)^3$(l은 자연수), $m^2=3^2l^3$

3^2l^3이 제곱수가 되려면 l이 제곱수가 되어야 한다.

$\therefore\ m^2=3^2(n^2)^3$($n$은 자연수), $m^2=(3n^3)^2$

$\therefore\ m=3n^3$

$\sqrt{2m}$이 자연수이므로 $2m$이 제곱수가 되어야 한다.

$2m=2\times 3n^3=6n^3$이므로 $n=6p^2$(p는 자연수)이면 조건을 만족시킨다.

$\therefore\ m=3\cdot 6^3p^6$

따라서 자연수 m의 최솟값 m_1은 $p=1$일 때

$m_1=3\cdot 6^3=2^3\cdot 3^4$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt[3]{3m_1^2}+\sqrt{2m_1}&=\sqrt[3]{2^6\cdot 3^9}+\sqrt{2^4\cdot 3^4}\\&=2^2\cdot 3^3+2^2\cdot 3^2\\&=144\end{aligned}$$

18. [정답] ⑤

[해설]

729의 n제곱근 중 실수를 x라 하면

n이 짝수일 때, $x=\pm\sqrt[n]{729}$

n이 홀수일 때, $x=\sqrt[n]{729}$

$\sqrt[n]{729}=3^{\frac{6}{n}}$이므로 x의 값이 정수가 되려면 n은 6의 약수이어야 하고, 2이상인 자연수 n에 대하여 정수 x의 값이 a이므로,

$n=2,\ 3,\ 6$

(i) $n=2$일 때, $a=\pm 3^3$

$\therefore\ n^2+a=31$ 또는 $n^2+a=-23$

(ii) $n=3$일 때, $a=3^2$

$\therefore\ n^2+a=18$

(iii) $n=6$일 때, $a=\pm 3$

$\therefore\ n^2+a=39$ 또는 33

이상에서 n^2+a의 최댓값은 39이다.

19. [정답] $(2, 32)$, $(2, -32)$, $(5, 4)$, $(10, 2)$, $(10, -2)$

[해설]

$1024=2^{10}$의 n제곱근이 a이므로

$a^n=2^{10}$

a는 정수이므로 가능한 2 이상의 자연수 n은 2, 5, 10

(i) $n=2$일 때

$a^2=2^{10}$, $a=2^5=32$ 또는 $a=-2^5=-32$

즉 가능한 순서쌍은 $(2, 32)$, $(2, -32)$

(ii) $n=5$일 때

$a^5=2^{10}$, $a=2^2=4$

즉 가능한 순서쌍은 $(5, 4)$

(iii) $n=10$일 때

$a^{10}=2^{10}$,　　$a=2$ 또는 $a=-2$

즉 가능한 순서쌍은 $(10,\ 2)$, $(10,\ -2)$

이상에서 가능한 두 수 n, a의 순서쌍은

$(2,\ 32)$, $(2,\ -32)$, $(5,\ 4)$, $(10,\ 2)$, $(10,\ -2)$

20. [정답] 12

[해설]

$$a=\sqrt[4]{\frac{2}{9}}=2^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$b=\sqrt[6]{\frac{8}{81}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(3^4\right)^{-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}$$

에서

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n=\left(2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\right)^n$$

$$=\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{6}}\right)^n$$

따라서 $\left(\frac{b}{a}\right)^n$의 값이 유리수가 되도록 하려면 n은 12의 배수이어야 한다. 그러므로 150 이하의 12의 배수는 $150\div 12=12.5$이므로 그 개수는 12이다.

21. [정답] ①

[해설]

조건 (나)에서 방정식 $\left(x^n-64\right)f(x)=0$의 세 실근은 모두 자연수이므로 $n=3$일 때만 가능하다.

$n=3$일 때,

$\left(x^3-64\right)f(x)=0$,　　$(x-4)\left(x^2+4x+16\right)f(x)=0$

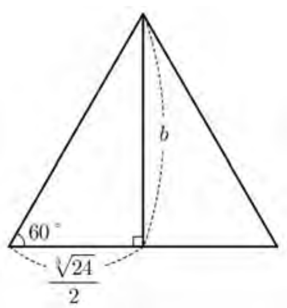
세 실근의 합이 12이고 자연수 근이 4이므로 방정식 $f(x)=0$의 두 실근의 합은 8이다.

$\gamma-\alpha$가 최대가 되는 경우는 나머지 두 근이 1, 7일 때이므로 최댓값은 $7-1=6$이다.

22. [정답] ②

[해설]

정육면체의 부피는　　$a=(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}$



그림과 같이 정삼각형의 한 각의 크기는 60°이므로

$$b=\frac{\sqrt[3]{24}}{2}\tan 60^\circ=\frac{\sqrt[3]{24}\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt[3]{24}\sqrt{3}}{2}}\right)^n=\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^n=3^{\frac{2}{3}n}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 3이다.

23. [정답] ③

[해설]

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $\left(x^n-512\right)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 두 실근은 각각 중근이다.

$\left(x^n-2^9\right)f(x)=0$,　　$x^n=2^9$ 또는 $f(x)=0$

함수 $f(x)$의 최솟값이 음수이므로 $f(x)$는 완전제곱식이 아니다. 따라서 방정식 $x^n=2^9$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 $f(x)=0$ 또한 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i) n이 홀수일 때

$x^n=2^9$에서　　$x=\sqrt[n]{2^9}$

이므로 주어진 조건에 모순이다.

(ii) n이 짝수일 때

$x^n=2^9$에서　　$x=\pm\sqrt[n]{2^9}$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 두 실근은

$x=\pm\sqrt[n]{2^9}$

이다.

$$\therefore\ f(x)=\left(x+\sqrt[n]{2^9}\right)\left(x-\sqrt[n]{2^9}\right)$$

$$=x^2-\sqrt[n]{2^{18}}$$

$$=x^2-2^{\frac{18}{n}}$$

함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=0$일 때 $-2^{\frac{18}{n}}$이다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수이므로 자연수 n은 18의 약수이다.

n은 짝수이므로

$n=2$ 또는 $n=6$ 또는 $n=18$

(i), (ii)에 의하여 자연수 n의 값은

$n=2$, $n=6$, $n=18$

이므로 n의 값의 합은 26이다.

24. [정답] ⑤

[해설]

자연수 n에 대하여 함수 $f(n)=\begin{cases}2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{n+1}{4}} & (n\text{이 홀수})\\ 2^{\frac{n+2}{4}} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

이고, 10 이하의 두 자연수 p, q 대하여 $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.

(i) p, q가 모두 홀수일 때

$$f(p)\times f(q)=\left(2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{p+1}{4}}\right)\times\left(2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{q+1}{4}}\right)$$

$$=2\times 3^{\frac{p+q+2}{4}}$$

$f(p)\times f(q)$가 자연수이므로 자연수 k에 대하여

$p+q=4k-2$

이다. 자연수 l에 대하여 1, 5, 9는 $4l-3$ 꼴이고, 3, 7

은 $4l-1$ 꼴이다.
따라서 p, q 두 수 모두 $4l-3$ 꼴이거나 $4l-1$ 꼴이다.
순서쌍 (p, q)의 개수는
$3\times3+2\times2=13$
(ii) p, q가 모두 짝수일 때
$$f(p)\times f(q)=2^{\frac{p+2}{4}}\times2^{\frac{q+2}{4}}=2^{\frac{p+q+4}{4}}$$
$f(p)\times f(q)$가 자연수이므로 자연수 k에 대하여
$p+q=4k$
이다. 자연수 l에 대하여 2, 6, 10은 $4l-2$ 꼴이고, 4, 8은 $4l$ 꼴이다.
따라서 p, q 두 수 모두 $4l-2$ 꼴이거나 $4l$ 꼴이다.
순서쌍 (p, q)의 개수는
$3\times3+2\times2=13$
(iii) p가 홀수이고, q가 짝수일 때
$$f(p)\times f(q)=\left(2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{p+1}{4}}\right)\times2^{\frac{q+2}{4}}=3^{\frac{p+1}{4}}\times2^{\frac{q+4}{4}}$$
$f(p)\times f(q)$가 자연수이므로 두 자연수 m, l에 대하여
$p=4m-1$, $q=4l$
꼴이다. 3, 7은 $4m-1$ 꼴이고, 4, 8은 $4l$ 꼴이므로 순서쌍 (p, q)의 개수는
$2\times2=4$
(iv) p가 짝수이고, q가 홀수일 때
(iii)과 같은 방법으로 하면 순서쌍 (p, q)의 개수는
$2\times2=4$
이상에서 순서쌍 (p, q)의 개수는
$13+13+4+4=34$

25. [정답] ①

[해설]
$2s-1$은 홀수이므로
$$f(2s-1)=2^{\frac{2s+4}{3}}$$
$s\geq1$일 때 $\frac{2s+4}{3}\geq2$이므로 $f(2s-1)=2^{\frac{2s+4}{3}}\geq4$이다.
$$\therefore\ g(f(2s-1))=\log_2 2^{\frac{2s+4}{3}}=\frac{2s+4}{3}$$
$2t$는 짝수이므로
$$f(2t)=3^{\frac{2}{2t}}=3^{\frac{1}{t}}$$
$t\geq1$일 때 $\frac{1}{t}\leq1$이므로 $f(2t)=3^{\frac{1}{t}}\leq3$이다.
$$\therefore\ g(f(2t))=\log_3 3^{\frac{1}{t}}=\frac{1}{t}$$
$$\therefore\ \{(g\circ f)(2s-1)\}\times\{(g\circ f)(2t)\}=\frac{2s+4}{3}\times\frac{1}{t}=\frac{2s+4}{3t}$$
$\frac{2s+4}{3t}$가 자연수이므로 $2s+4$는 $3t$의 배수이다.

(i) $t=1$일 때
$2s+4$는 3의 배수이므로 조건을 만족시키는 s의 값은 1, 4이다.
따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (s, t)의 개수는 2이다.
(ii) $t=2$일 때
$2s+4$는 6의 배수이므로 조건을 만족시키는 s의 값은 1, 4이다.
따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (s, t)의 개수는 2이다.
(iii) $t=3$일 때
$2s+4$는 9의 배수이므로 조건을 만족시키는 s의 값은 존재하지 않는다.
(iv) $t=4$일 때
$2s+4$는 12의 배수이므로 조건을 만족시키는 s의 값은 4이다.
따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (s, t)의 개수는 1이다.
(v) $t=5$일 때
$2s+4$는 15의 배수이므로 조건을 만족시키는 s의 값은 존재하지 않는다.
이상에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (s, t)의 개수는
$2+2+1=5$

26. [정답] ②

[해설]
점 P_1의 x좌표의 값을 $t^4(t>0)$이라 하면 점 P_1의 좌표는 (t^4, t^3)이다.
따라서 Q_1의 좌표는 $(0, t^3)$이고 점 B의 좌표는 $(t^3, 0)$이다.
따라서 P_2의 좌표는 (t^3, t)이다.
Q_2의 좌표는 $(0, t)$, 점 D의 좌표는 $(t, 0)$, 점 P_3의 좌표는 $(t, \sqrt[4]{t^3})$이다.
따라서 점 Q_3의 좌표는 $(0, \sqrt[4]{t^3})$이다.
$$\therefore\ a=t,\ b=\sqrt[4]{t^3}$$
$ab=\sqrt[8]{3^7}$에서 $t^{\frac{7}{4}}=3^{\frac{7}{8}}$ $\quad\therefore\ t=3^{\frac{7}{8}\times\frac{4}{7}}=3^{\frac{1}{2}}$
이때, 점 P_1의 x좌표의 값은
$$t^4=3^{\frac{1}{2}\times4}=3^2=9$$

27. [정답] ④

[해설]
A지역에서 $H_1=12$, $V_1=2$, $H_2=48$, $V_2=18$일 때
$$18=2\times\left(\frac{48}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}},\qquad 3^2=(2^2)^{\frac{2}{2-k}}$$
$$\therefore\ 3=2^{\frac{2}{2-k}}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$
B지역에서 $H_1=10$, $V_1=a$, $H_2=80$, $V_2=b$일 때
$$b=a\times\left(\frac{80}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}},\qquad \frac{b}{a}=(2^3)^{\frac{2}{2-k}},\qquad \frac{b}{a}=\left(2^{\frac{2}{2-k}}\right)^3$$
㉠을 대입하면 $\frac{b}{a}=3^3=27$